KINEMATYKA

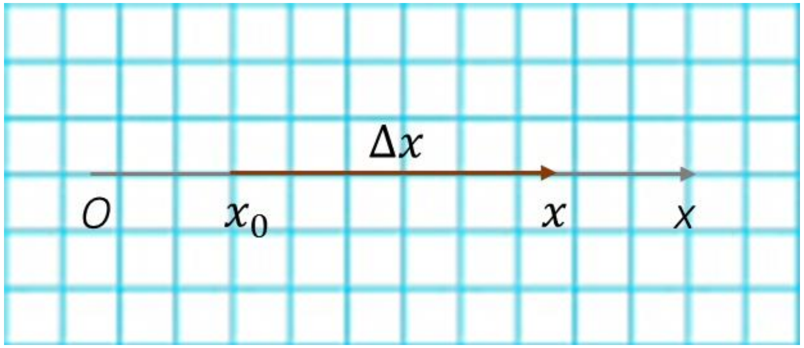
Kinematyka – dział fizyki zajmujący się ruchem ciał

Ruch – zmiana wzajemnego położenia jednego ciała względem drugiego wraz z upływem czasu

Położenie ciała – jest to jego pozycja w określonym układzie odniesienia, ruch ciała widziany z różnych układów odniesienia może być zupełnie inny

Punkt materialny – obiekt obdarzony masą, którego rozmiary (objętość) możemy zaniedbać

Ruch w przestrzeni jednowymiarowej



Przemieszczenie

Δx – wektor

$\Delta x > 0$ – kierunek ruchu zgodny z osią x

$\Delta x < 0$ – kierunek ruchu przeciwny do kierunku osi x

Tor ruchu – krzywa zakreślana w przestrzeni przez poruszające się ciało

Droga – długość toru

Przemieszczenie nie jest równoważne przebytej drodze !

Podczas jednego okrążenia na bieżni przebywamy drogę 400 m, a nasze przemieszczenie wynosi 0.

Prędkość średnia – stosunek przemieszczenia do czasu, w jakim to przemieszczenie nastąpiło

$$\bar{V} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Prędkość chwilowa – pochodna położenia po czasie

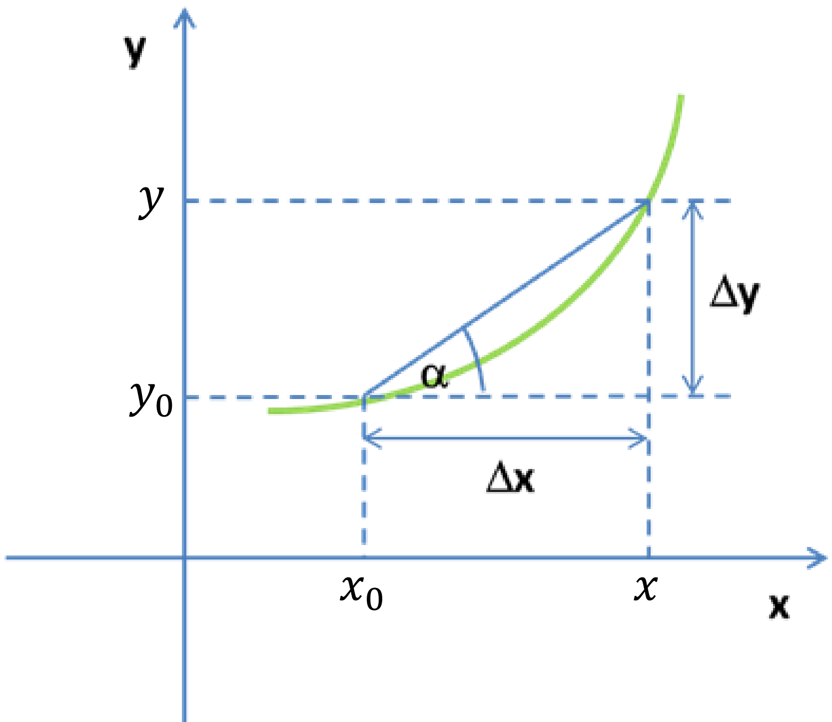
$$V_{ch} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x}$$

Prędkość jest wektorem!
Ma kierunek i zwrot zgodny z wektorem przemieszczenia!

Wymiarem prędkości jest [m/s].

Graficzna interpretacja pochodnej

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$$

Gdy $\Delta x \to 0$, to:

α $-$ *kąt nachylenia stycznej do krzywej w* (x_0, y_0)

Wybrane wzory

Funkcja	Pochodna	Uwagi
$y = const$	$y' = 0$	
$y = const \cdot f(x)$	$y' = const \cdot f'(x)$	
$y = u + v$	$y' = u' + v'$	$u = f(x), v = g(x)$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + u \cdot v'$	
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	
$y = f\big(g(x)\big)$	$y' = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$	
$y = x^a$	$y' = a \cdot x^{a-1}$	
$y = sinx$	$y' = cosx$	
$y = cosx$	$y' = -sinx$	
$y = tgx$	$y' = \frac{1}{cos^2x} = 1 + tg^2x$	
$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{sin^2x} = -(1 + ctg^2x)$	

KINEMATYKA

Funkcja	Pochodna	Uwagi
$y = arcsinx$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$y = arccosx$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	
$y = arcctgx$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	
$y = e^x$	$y' = e^x$	
$y = a^x$	$y' = a^x lna$	
$y = ln\|x\|$	$y' = \frac{1}{x}$	
$y = log_a\|x\|$	$y' = \frac{1}{xlna} = \frac{1}{x} log_a e$	

Ciało zmienia swoje położenie w czasie = porusza się z pewną prędkością

Prędkość zmienia się w czasie = ciało przyspiesza (zwalnia)

Przyspieszenie średnie – stosunek zmiany prędkości V_x do czasu w jakim ta zmiana nastąpiła

$$\bar{a} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t}$$

Przyspieszenie chwilowe – pochodna prędkości po czasie

$$a_{ch} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_x}{\Delta t} = \frac{dV_x}{dt} = {V_x}'(t) = \dot{V}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = x''(t) = \ddot{x}$$

Przyspieszenie jest wektorem!
Dla ruchu w jednym wymiarze ma kierunek i zwrot taki jak zmiana prędkości!

Wymiarem przyspieszenia jest [m/s^2].

KINEMATYKA

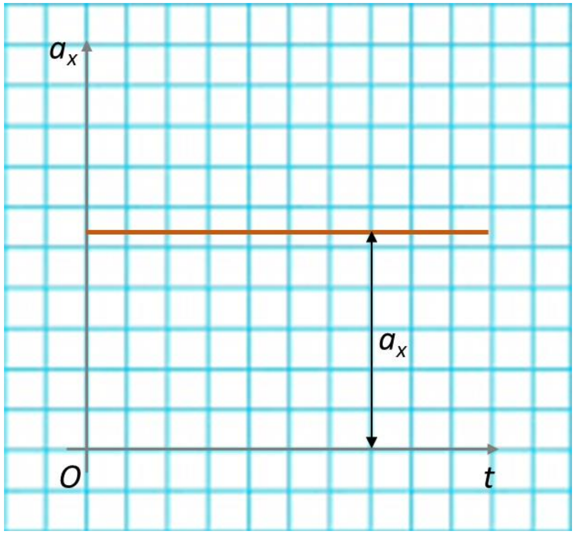
Obiekt przyspiesza, prędkość rośnie

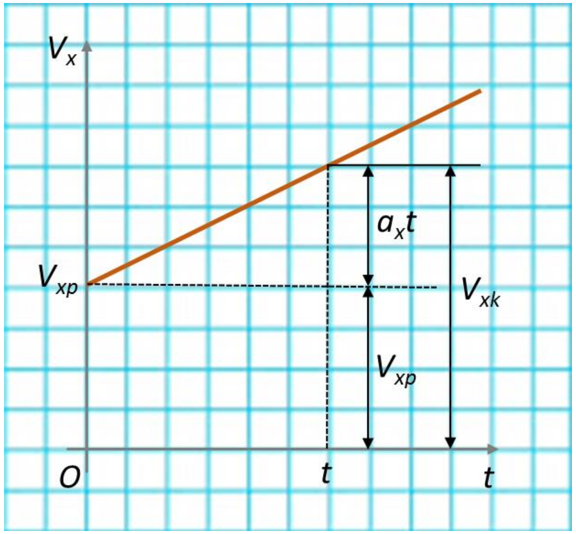
$$a > 0$$

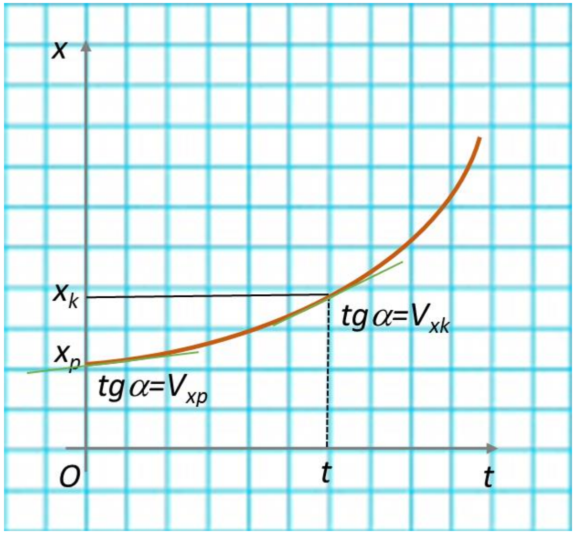
Obiekt hamuje, prędkość maleje

$$a < 0$$

Ruch ze stałym przyspieszeniem







$$a_x = \frac{V_{xk} - V_{xp}}{t}$$

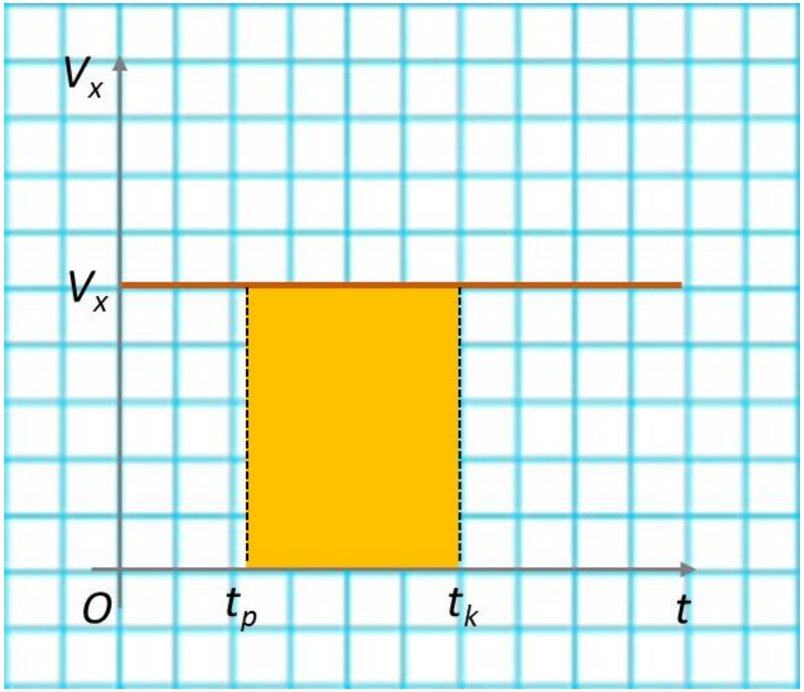
$$V_{xk} = V_{xp} + a_x t$$

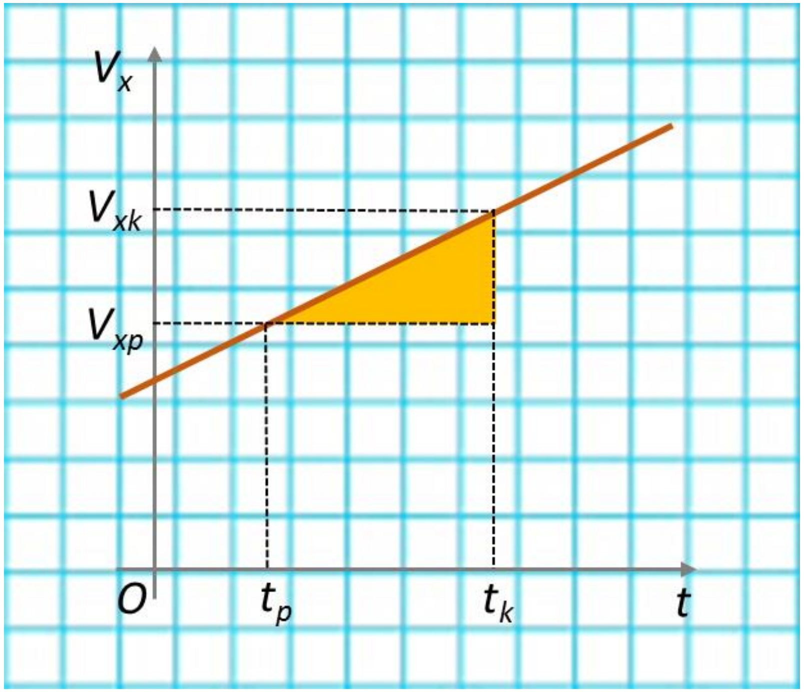
$$x_k = x_p + V_{xp} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Każde ciało poruszające się tylko pod wpływem grawitacji doznaje skierowanego w dół przyspieszenia!

Jego średnia wartość na powierzchni Ziemi wynosi $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$.

Przemieszczenie jako całka

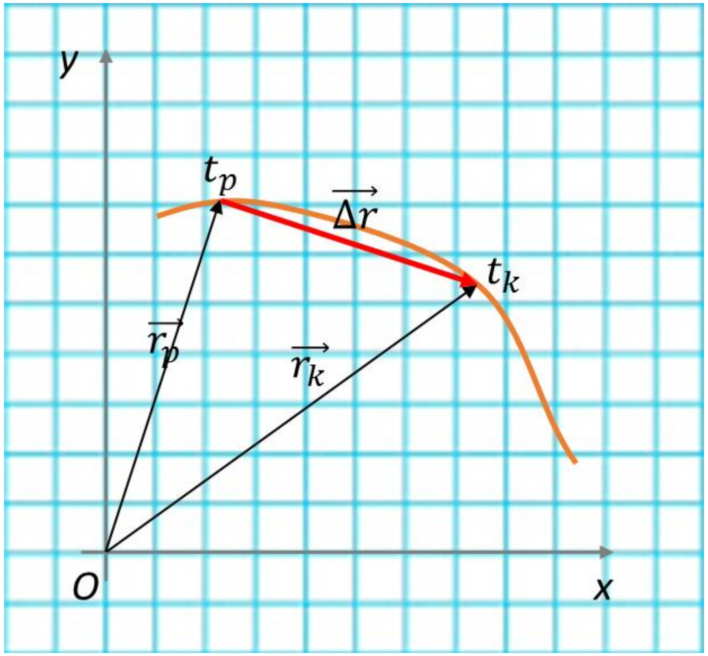




$$a = 0$$
$$V_x = const$$
$$\Delta x = V_x(t_k - t_p)$$

$$a = const \neq 0$$
$$V_{xk} = V_{xp} + a_x(t_k - t_p)$$
$$\Delta x = \frac{1}{2}(t_k - t_p)(V_{xk} - V_{xp}) =$$
$$= \frac{1}{2}(t_k - t_p)a_x(t_k - t_p) =$$
$$= \frac{1}{2}a_x(t_k - t_p)^2$$

Ruch w dwóch wymiarach – prędkość



Wektor przemieszczenia: $\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_k} - \overrightarrow{r_p}$

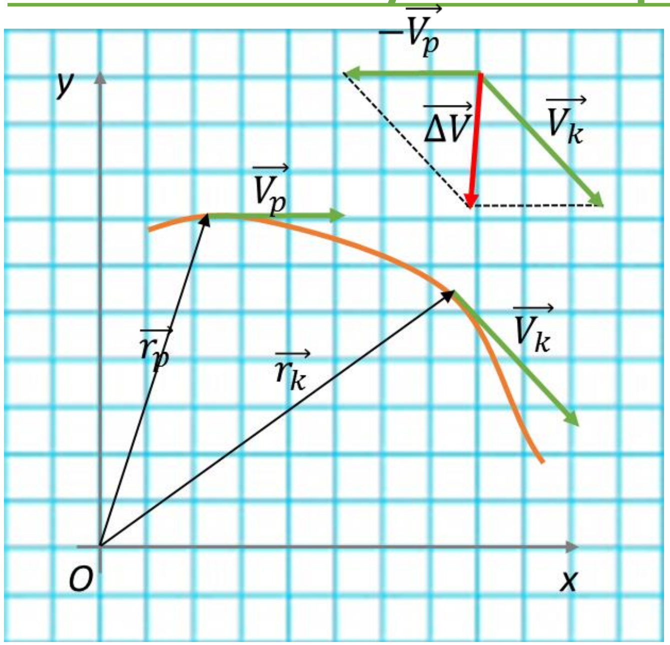
$\overrightarrow{r_k} = \overrightarrow{r_p} + \overrightarrow{\Delta r}$

Prędkość średnia: $\overline{\vec{V}} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$

Prędkość chwilowa: $\vec{V} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Wartość prędkości: $V = \left|\vec{V}\right|$

Ruch w dwóch wymiarach – przyspieszenie



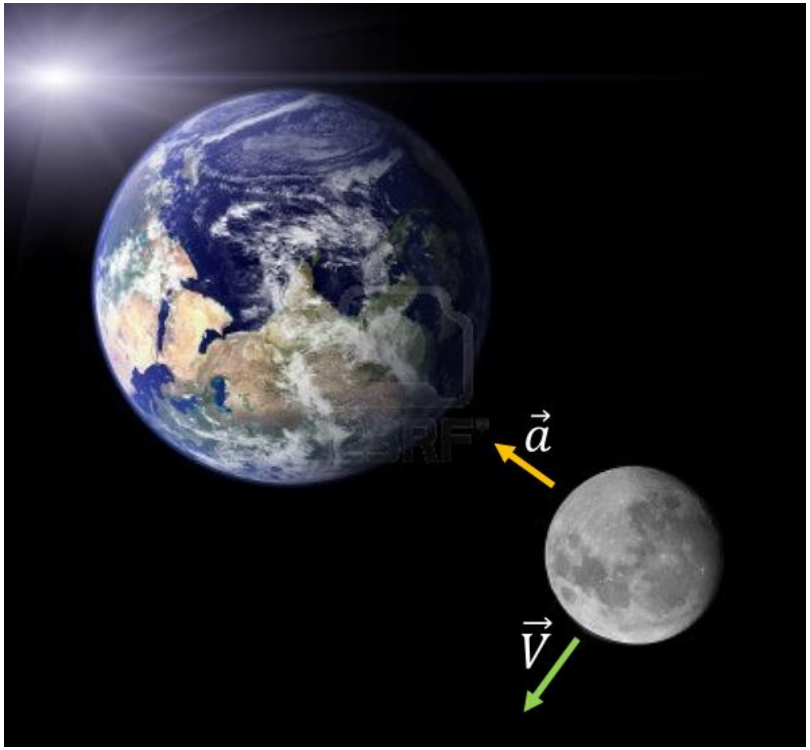
Wektor zmiany prędkości: $\overrightarrow{\Delta V} = \overrightarrow{V_k} - \overrightarrow{V_p}$

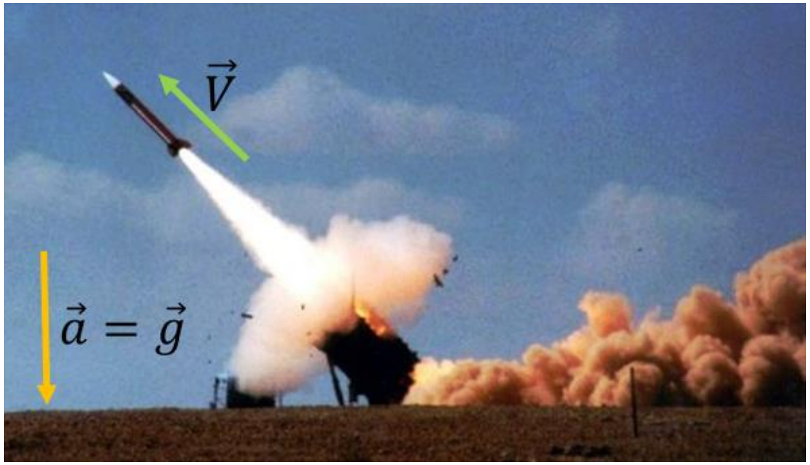
Przyspieszenie średnie: $\bar{\vec{a}} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$

Przyspieszenie chwilowe: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

Wartość przyspieszenia: $a = |\vec{a}|$

Przykłady ruchu w dwóch wymiarach

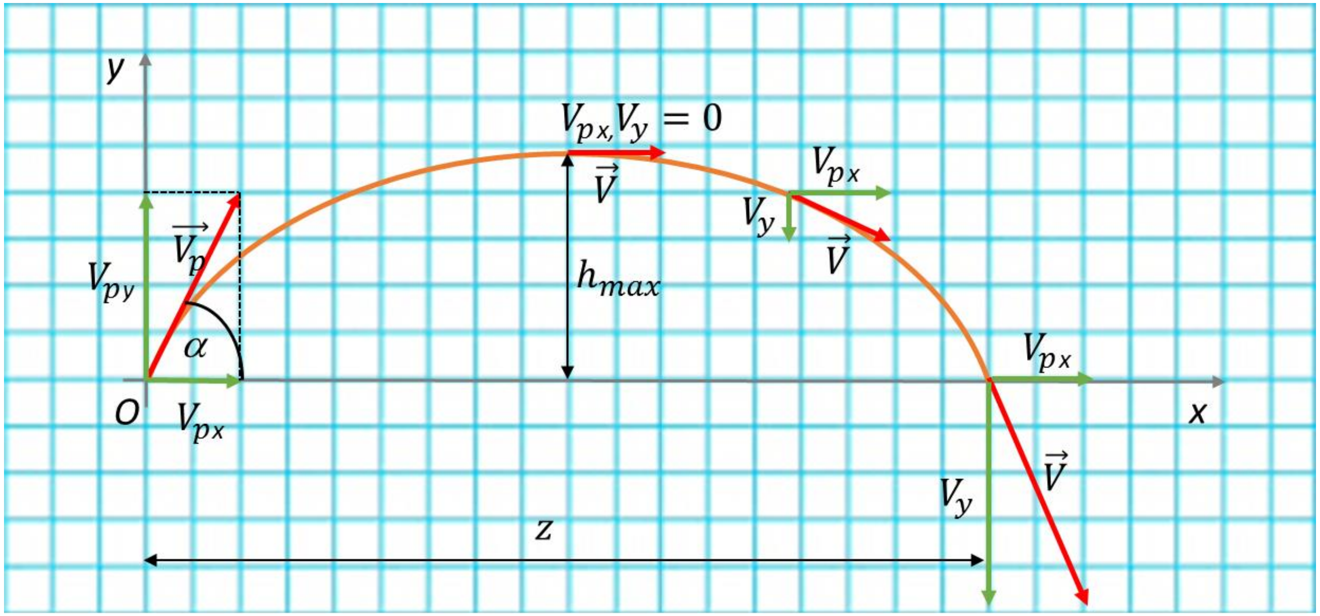




Kierunek ruchu może, ale nie musi być zgodny z kierunkiem wektora przyspieszenia!

Rzut ukośny – założenia

1. Stałe przyspieszenie ziemskie g, brak oporów ruchu;
2. Ruch jednostajny w kierunku poziomym, jednostajnie przyspieszony (opóźniony) w kierunku pionowym.



$a_x = 0, a_y = -g$

$x_p = 0, y_p = 0$

$V_x = V_{px} = V_p cos\alpha, V_y = V_{py} - gt = V_p sin\alpha - gt$

$x = V_x t = V_p cos\alpha t$

$y = V_y t - \frac{1}{2} g t^2 = V_p sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2$

Przykłady ruchu w dwóch wymiarach – rzut ukośny

Całkowity czas ruchu (t_z) = 2 x czas potrzebny do osiągnięcia h_{max} (t_{max})

$$y = h_{max} \equiv V_y = 0 \equiv t = t_{max}$$

$$0 = V_p sin\alpha - g t_{max}$$

$$t_{max} = \frac{V_p sin\alpha}{g}$$

$$t_z = 2t_{max}$$

$$x = z \equiv t = t_z = 2t_{max}$$

$$z = V_p cos\alpha t_z = 2\frac{V_p sin\alpha}{g} V_p cos\alpha = \frac{{V_p}^2 sin2\alpha}{g}$$

$$y = h_{max} \equiv t = t_{max}$$

$$h_{max} = V_p sin\alpha t_{max} - \frac{1}{2} g {t_{max}}^2 = V_p sin\alpha \frac{V_p sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_p sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$h_{max} = \frac{{V_p}^2 sin^2\alpha}{g} - \frac{1}{2}\frac{{V_p}^2 sin^2\alpha}{g} = \frac{1}{2}\frac{{V_p}^2 sin^2\alpha}{g}$$

Rzut ukośny – równanie toru

$$x = V_p cos\alpha t$$

$$y = V_p sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \frac{x}{V_p cos\alpha}$$

$$y = V_p sin\alpha \left(\frac{x}{V_p cos\alpha}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_p cos\alpha}\right)^2$$

$$y = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} x - \frac{g}{2{V_p}^2 cos^2\alpha} x^2$$

$$y = tg\alpha x - \frac{g}{2{V_p}^2 cos^2\alpha} x^2$$

Tor ruchu jest parabolą!

Rzut ukośny – szczególne przypadki

Rzut pionowy:

$$V_x = 0$$

$$V_y = V_p - gt$$

$$y = V_p t - \frac{1}{2}gt^2$$

Rzut poziomy:

$$V_x = V_p$$

$$V_y = -gt$$

$$y = y_p - \frac{1}{2}gt^2$$

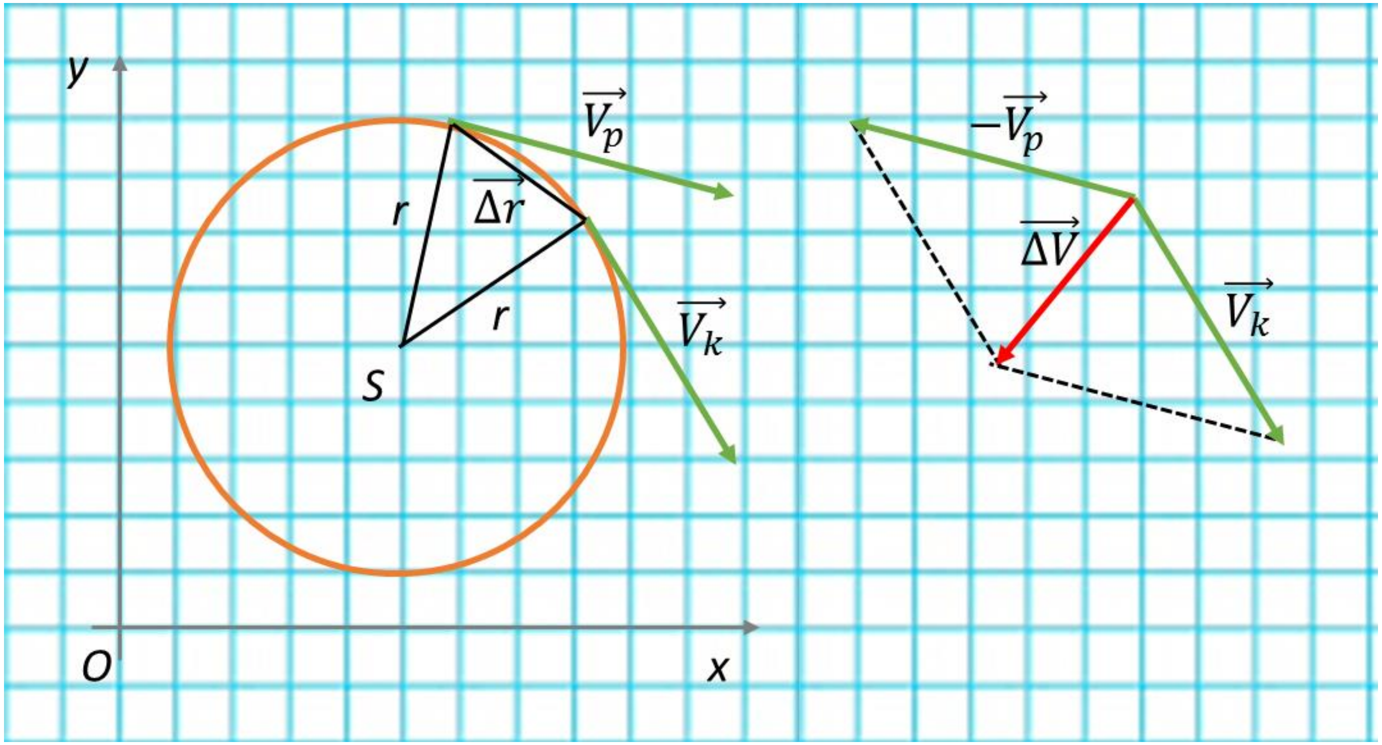
$$x = V_p t$$

$$x = z \equiv y = 0 \equiv t = t_z$$

Przykład

Wyprowadzić wzór na zasięg w rzucie poziomym.

Ruch jednostajny po okręgu – wartość prędkości nie ulega zmianie, ale zmienia się kierunek wektora prędkości



Przyspieszenie średnie: $\vec{\bar{a}} = \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$

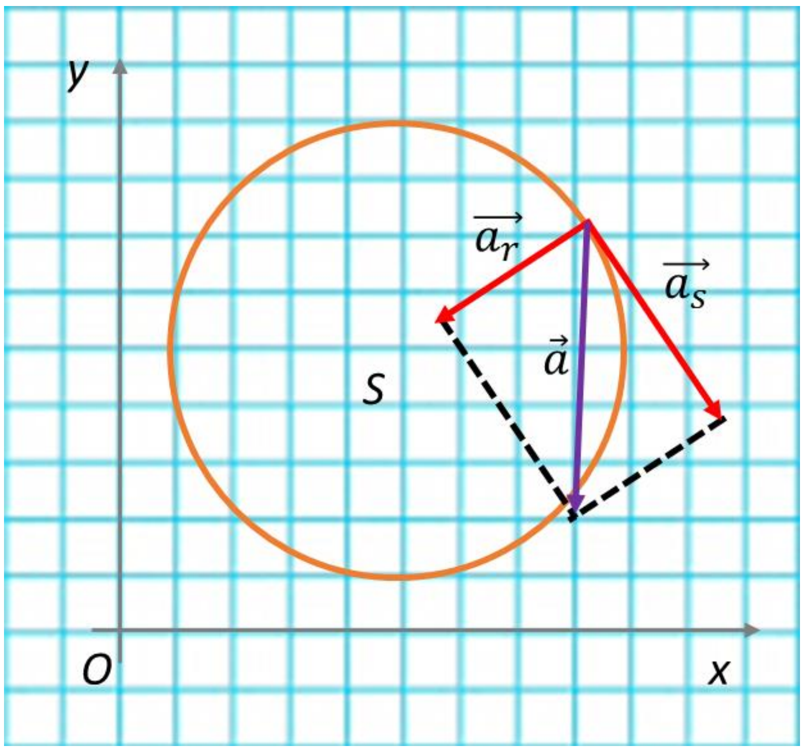
Przyspieszenie dośrodkowe (radialne): $a_r = \frac{V^2}{r}$

Ruch po okręgu – przyspieszenie radialne i styczne

Przyspieszenie dośrodkowe (radialne) – skutek zmiany kierunku wektora prędkości

Przyspieszenie styczne – skutek zmiany wartości wektora prędkości

Przyspieszenie całkowite – suma wektorowa przyspieszenia radialnego i stycznego



Przyspieszenie radialne: $a_r = \frac{V^2}{r}$

Przyspieszenie styczne: $a_s = \frac{d|\vec{V}|}{dt}$

Przyspieszenie całkowite: $\vec{a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_s}$